

Enseñanza de la Multiplicación: Desde el Estudio de Clases Japonés a las Propuestas Iberoamericanas

MASAMI ISODA y RAIMUNDO OLFOS
Coordinadores

Ubiratan D'Ambrosio y Claudia Georgia Sabba
María del Carmen Chamorro
David Block y Laura Reséndiz
María de Fátima Mendes, Joana Brocardo y Hélia Oliveira

2011



EDICIONES UNIVERSITARIAS DE VALPARAÍSO
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO

Nuestros reconocimientos:

A CRICED, Centro para la Investigación en el Desarrollo Educacional en Cooperación Internacional de la Universidad de Tsukuba, patrocinante de la Estadía de Investigación del Dr. Olfos en la Universidad de Tsukuba, Japón. Marzo - Junio 2008.

A JICA, Agencia de Cooperación Internacional de Japón y los Ministerios de Educación de Japón y de Chile, por facilitar la profundización en el Estudio de Clases a través de un curso con visitas al aula para académicos chilenos, Febrero 2008. JICA y CRICED, por el patrocinio parcial de la versión editada del presente libro.

A los Profesores Satoshi Natsusaka, Hiroshi Tanaka, Kozo Tsubota, Takao Seiyama de la Escuela Anexa de la Universidad de Tsukuba en Tokio, y al profesor Hideyuki Muramoto de la Escuela de Maruyama, quienes generosamente compartieron sus clases, planes de clases, materiales didácticos y tiempos para la discusión.

A la Profesora Soledad Estrella, traductora de los videos de los profesores Muramoto y Seiyama y transcripciones de clases, correctora de las versiones preliminares, orientadora del diseño, portada y de la selección fotográfica.

A los autores que se suman a esta publicación: Ubiratan D'Ambrosio y Claudia Georgia Sabba de Brasil, María del Carmen Chamorro de España, David Block y Laura Reséndiz de México y María de Fátima Mendes, Joana Brocardo y Hélia Oliveira de Portugal.

Y a la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas y Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Masami Isoda (Tsukuba)
Raimundo Olfos (Valparaíso)

ÍNDICE

Prólogo	Página 11
Introducción	21
PARTE I: La multiplicación de los naturales en el currículo	23
Tendencias internacionales sobre la Enseñanza de la Multiplicación	
- Tendencia a la Contextualización	25
- <i>El principio de extensión para la enseñanza de la multiplicación</i>	<i>27</i>
Orientaciones curriculares en torno a la enseñanza de la multiplicación en 8 países	28
- <i>Aspectos distintivos de las propuestas curriculares en torno a la multiplicación.....</i>	<i>29</i>
- <i>Paralelo en torno al tratamiento de la multiplicación</i>	<i>32</i>
- <i>Síntesis del paralelo en torno al tratamiento de la multiplicación</i>	<i>34</i>
Enfoque curricular japonés para la enseñanza de la multiplicación	35
<i>La enseñanza de la multiplicación en la Guía para la Enseñanza del</i>	
<i>Gobierno japonés</i>	<i>36</i>
- <i>Secuenciación para la enseñanza de la multiplicación en los textos escolares.....</i>	<i>40</i>
- <i>Implicancias para la enseñanza de la multiplicación en países hispanoparlantes.....</i>	<i>44</i>
PARTE II: La enseñanza del concepto de multiplicación, las tablas de multiplicar y las propiedades de la tabla	47
Introducción	49
El concepto de multiplicación	50
- <i>Problemas de tipo multiplicativo</i>	<i>51</i>
- <i>El modelo multiplicativo.....</i>	<i>51</i>
La enseñanza del concepto de multiplicación	52
- <i>Cómo iniciar el estudio de la multiplicación en la escuela</i>	<i>53</i>
- <i>La suma repetida como conocimiento previo y</i>	

<i>la unidad como conflicto cognitivo</i>	54
- <i>Expresión matemática y procedimiento operativo de la multiplicación</i>	55
- <i>Desde la conmutatividad al uso de la expresión “multiplicado por”</i>	59
- <i>La iniciación a la multiplicación en la Guía de Japón</i>	60
- <i>Iniciación a la multiplicación en los programas chilenos</i>	60
La iniciación a la multiplicación en un caso de Estudio de Clases	63
- <i>Descripción y plan de la clase a investigar</i>	63
- <i>Relato de una clase pública en que se inicia el estudio de la multiplicación</i>	67
- <i>Análisis de la clase del profesor Natusaka</i>	75
Ejemplo de clase de investigación. Aplicación del concepto de multiplicación	82
Desarrollo de la habilidad de agrupamiento a través del estudio de la multiplicación en el caso de Japón	85
Plan de la subunidad “Iniciación al Concepto de Multiplicación”	87
- <i>Sesión 1: Una nueva forma de calcular</i>	88
- <i>Sesión 2: La multiplicación en nuevos contextos</i>	91
- <i>Sesión 3: Usemos el modelo de la multiplicación</i>	95
Enseñanza de las tablas y de las propiedades de la tabla	98
Orientaciones para la enseñanza de las tablas y sus propiedades	98
- <i>Memorización y comprensión para avanzar en las tablas</i>	98
- <i>Las sugerencias de los textos</i>	100
Uso de materiales para la memorización y la comprensión	103
- <i>Uso de la colección de círculos</i>	103
- <i>Uso de tarjetas y naipes</i>	104
- <i>Uso de naipes ilustrados</i>	105
- <i>Características de las cartas de tablas de multiplicar ilustradas</i>	105
- <i>Uso de hoja o libreta de registro de avance</i>	107
Sugerencia de los programas para la enseñanza de las tablas	109
- <i>La enseñanza de las tablas en la Guía de Japón</i>	109
- <i>La enseñanza de las tablas en los programas chilenos</i>	110
Enseñanza de las tablas del 2 al 5	115
- <i>Entregar la responsabilidad de aprender al alumno</i>	115
- <i>Planificación de la Subunidad “Las tablas del 2 al 5”</i>	116
<i>Sesión 1: Construyendo la tabla del 2</i>	118
<i>Sesión 2: Memorizando la tabla del 2</i>	120
<i>Sesión 3: Aplicando la tabla del 2</i>	121
<i>Sesión 13: Entreteniéndonos con las tablas del 2 al 5</i>	123
<i>Sesión 14: Descubriendo propiedades en las tablas del 2 al 5</i>	125
- <i>Usemos las tablas de multiplicar ya estudiadas</i>	126
Enseñanza de las tablas del 6 al 9	127

- <i>Para multiplicar por 6 o más</i>	127
- <i>Planificación de la Subunidad “Las tablas del 6 al 9”</i>	128
Sesión 1: Construyendo la tabla del 6	129
Sesión 2: Memorizando la tabla del 6	131
Sesión 3: Aplicando la tabla del 6	132
Sesión 13: Ejercitando y aplicando tablas del 6 al 9	134
Sesión 14: Entreteniéndose con las tablas del 6 al 9	136
Propiedades de las tablas y de la tabla completa	138
- <i>Clase para investigar: Propiedades de la multiplicación</i>	138
- <i>La multiplicación por 1 y la propiedad conmutativa</i>	141
- <i>Planificación de la Subunidad “Propiedades de la tabla”</i>	141
Sesión 1: Construyendo y memorizando la tabla del 1	142
Sesión 2: Construyendo y leyendo la tabla bidimensional para la multiplicación.....	144
Sesión 3: Descubriendo la relación entre el multiplicador y el producto	146
Sesión 4: Descubriendo la conmutatividad de la multiplicación	148
Sesión 5: Ejercitando y aplicando las tablas de multiplicación	150
Sesión 6: Ejercitando y entreteniéndonos con las tablas	152
Sesión 7: Ejercitando y entreteniéndonos con la multiplicación	153
PARTE III: Enseñando a multiplicar números de varias cifras	155
Términos para enseñar la multiplicación con multidígitos	157
Tendencias internacionales sobre la enseñanza de la multiplicación	160
- <i>El algoritmo de la multiplicación en el currículo escolar</i>	160
- <i>Investigación sobre la enseñanza de los algoritmos de cálculo</i>	161
- <i>A modo de síntesis</i>	162
Enseñanza de la multiplicación con multidígitos en Japón y en Chile	163
- <i>Multiplicación con multidígitos en la Guía de Japón</i>	163
- <i>Multiplicación con multidígitos en los programas chilenos</i>	164
Estudio de una clase en la que se enseña la forma de calcular una multiplicación	174
- <i>Descripción general de la clase</i>	174
- <i>Génesis de este plan de clases</i>	175
- <i>Descripción y análisis de los episodios de la clase</i>	177
- <i>Criterios para evaluar la clase</i>	180
- <i>Plan de la clase 4 de la secuencia de 13 sesiones</i>	180
- <i>Planificación de las 13 sesiones de la Unidad</i>	182
- <i>Metas de la Unidad</i>	183
La visión del grupo de Maruyama	183
- <i>Elementos relevantes de la visión del grupo de Maruyama</i>	184

- <i>Los puntos de vista del grupo de Maruyama</i>	185
- <i>Características de los alumnos de la Escuela de Maruyama</i>	190
Planificación de la Unidad “Multiplicación con multidígitos”	192
- <i>Características de la Unidad</i>	192
- <i>Identificación de las subunidades de la Unidad</i>	194
- <i>Sugerencias generales para el tratamiento de la Unidad</i>	196
Subunidad: Multipliquemos con ceros	198
Sesión 1: Multiplicando con el factor 0	198
Sesión 2: Descubriendo la multiplicación por 10, 100 y 1000	201
Sesión 3: Descubriendo la multiplicación por $D0$, $C00$, $U_M 000 \times U$	202
Sesión 4: Descubriendo la multiplicación por $D0$, $C00 \times U$ con canje	203
Subunidad: Multipliquemos en la forma vertical	204
Sesión 1: Descubriendo la multiplicación entre números $DU \times U$, sin canje	204
Sesión 2: Descubriendo la multiplicación entre números $DU \times U$, con canje	205
Sesión 3: Descubriendo la multiplicación $DU \times U$, con canje en la decena	207
Sesión 4: Descubriendo la multiplicación $DU \times U$, con canje en el proceso	208
Sesión 5: Ejercitando la multiplicación entre números $DU \times U$	209
Subunidad: Sigamos multiplicando en forma vertical	210
Sesión 1: Descubriendo la multiplicación $CDU \times U$, sin canje	210
Sesión 2: Descubriendo la multiplicación $CDU \times U$, con canje en las unidades y/o decenas	211
Sesión 3: Descubriendo la multiplicación $CDU \times U$, con canje en las centenas y en la suma de productos parciales	212
Sesión 4: Resolviendo ejercicios y problemas de la aplicación de la multiplicación $CDU \times U$, sin y con canjes y suma de productos parciales	214
Sesión 5: Confirmando lo aprendido sobre la multiplicación $CDU \times U$	215
Subunidad: Multiplicando y multiplicador con multidígitos	216
Sesión 1: Descubriendo la multiplicación $DU \times DU$, sin canje	216
Sesión 2: Descubriendo la multiplicación $DU \times DU$, con canje	217
Sesión 3: Explicaciones a la forma de multiplicar multidígitos	219
Sesión 4: Descubriendo la multiplicación $CDU \times DU$	221
Anexo 1. La extensión del concepto de multiplicación	223
Anexo 2. Diferencias gramaticales en la notación matemática	229
Referencias Bibliográficas	233

PARTE IV. Contribuciones de autores iberoamericanos	237
¿PODEMOS EXPLICAR EL FRACASO DE LOS ESTUDIANTES EN EL APRENDIZAJE DE LA MULTIPLICACIÓN? M ^a del Carmen Chamorro, España	239
1. Presentación del problema	239
2. La multiplicación de números naturales en el currículo.	242
3. Aportaciones de la Didáctica.....	246
3.1. ¿Qué nos enseña la Teoría de los Campos Conceptuales?	248
3.2. Diseñar progresiones didácticas para la enseñanza del cálculo multiplicativo	250
4. Los métodos informales de cálculo	257
5. ¿Hay que enseñar algoritmos?	267
Referencias Bibliográficas	273
“LOS COLLARES” SECUENCIA DIDÁCTICA SOBRE PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD DE VALOR FALTANTE. Laura Reséndiz y David Block, México	275
1. Introducción: pequeña fábrica de problemas	275
2. La secuencia didáctica “Los collares”	277
3. La aplicación de la secuencia.....	279
3.1 Metodología	279
3.2 Resultados de la aplicación	281
3.2.1 Problemas en los que la relación es entre las cantidades de perlas de un collar y las de n collares (valor unitario presente como dato o como pregunta)	281
3.2.2 Problemas en los que la relación es entre las cantidades de perlas de m collares y las de n collares (el valor unitario no está presente ni como dato ni como pregunta)	287
3.2.3 La retroalimentación	294
4. Comentario final	298
Referencias Bibliográficas	299
Anexo	301
UNA MIRADA ETNOMATEMÁTICA SOBRE LA CUESTIÓN DE LA IDEA DE MULTIPLICAR APRENDER A MULTIPLICAR: LENGUAJE Y MIRADAS INVOLUCRADAS EN LA CUESTIÓN	
Claudia Geórgia Sabba y Ubiratan D’Ambrosio, Brasil	303
1. Introducción	303
2. Alternativa. El aprendizaje por proyectos	305
3. La multiplicación por medio de trayectorias de investigación	309
4. Multiplicación: Tabla de multiplicar con polígonos.....	310
5. Multiplicar con la mirada del arte y la tecnología.....	312
6. Multiplicación usando calculadora	314

7. Unas palabras más sobre el aprendizaje y enseñanza de los conocimientos matemáticos	316
Referencias Bibliográficas	318

LA MULTIPLICACIÓN: CONSTRUYENDO OPORTUNIDADES PARA SU APRENDIZAJE

Fátima Mendes, Joana Brocardo, Hélia Oliveira, Portugal	321
1. Trayectorias de aprendizaje	322
2. Una trayectoria hipotética para 3º básico	322
3. Precizando la trayectoria hipotética: Una secuencia de tareas	327
4. Tareas.....	330
5. Poner en práctica las tareas: prever y explorar	333
5.1. Prever la implementación de las tareas	334
5.2. Explorar y discutir las tareas	338
6. Concretización de trayectorias de aprendizaje y Estudio de Clases:	
¿Diferentes perspectivas sobre el papel del profesor?	346
6.1. El papel del docente	346
6.2. Oportunidades de desarrollo profesional	349
Referencias Bibliográficas	350

APÉNDICE

Desarrollo de las bases para la concepción de la multiplicación en primer grado	353
---	-----

PRÓLOGO

Visiblemente, este libro tiene el propósito de asistir a profesores, formadores de profesores y autores de textos en la preparación de la enseñanza de la multiplicación de números naturales; ofreciendo ejemplos de lecciones, planes de clases y sugerencias para su enseñanza. Estas orientaciones recogen la experiencia del Estudio de Clases en Japón que data de la década de 1870 y recomendaciones presentes en la literatura internacional referida a la enseñanza y el aprendizaje de la multiplicación. En esta segunda edición se amplía el horizonte de la producción al incorporar como co-autores a experimentados académicos investigadores y formadores de profesores de Brasil, México, España y Portugal. Sus aportes, de indiscutible significación en el seno del pensamiento de la didáctica y la educación matemática iberoamericana, dan evidencias de la buena acogida de los principios del Estudio de Clases en la región hispanohablante.

Un segundo propósito es favorecer en los formadores de profesores, diseñadores del currículo, editores y autores de textos, como también en docentes y estudiantes de pedagogía, la comprensión de un enfoque de enseñanza de la matemática que concilia el énfasis en la resolución de problemas, originado en Japón hacia 1940, con el tratamiento de los contenidos curriculares. Este enfoque ha alcanzado reconocimiento internacional desde la década de 1990 en virtud de las situaciones problemas que se van mejorando con el Estudio de Clases y de su difusión a través de clases públicas. El libro se nutre del impacto del Estudio de Clases sobre las decisiones curriculares gubernamentales y del comportamiento de los profesores en las aulas de Japón, quedando a la vista una educación matemática eficiente y vanguardista. De hecho, los resultados en matemáticas de Japón en las mediciones TIMSS y PISA, a pesar de haber disminuido, se mantienen en el cuartil superior más allá de haber reducido sólo a 3 horas semanales la componente matemática del currículo

de 1° a 6° grado durante la década anterior, decisión comparativamente desventajosa en el contexto internacional.

Este libro complementa una edición pionera de tres libros (Isoda, Arcavi y Mena, 2007; Isoda y Olfos, 2009a; Isoda y Olfos, 2009b) que difunden en el mundo hispano hablante un modelo de enseñanza de la matemática escolar en el que los profesores son los protagonistas poniendo en juego su creatividad y su capacidad proactiva. Además, este modelo basado en la resolución de problemas y los requerimientos del currículo, concilia en la práctica los dos grandes propósitos de la educación matemática, a saber, el formativo y el informativo. En la dimensión formativa, favorece el desarrollo de las habilidades transversales de pensamiento y comunicación en matemáticas (Isoda, 2006), y en la dimensión informativa, favorece la adquisición de los contenidos disciplinarios.

El libro desarrolla ejemplos de la preparación e implementación de clases centradas en problemas de final abierto que contribuyen al tratamiento de los contenidos de los programas de estudio; dando pistas para que en Chile e Iberoamérica la reflexión de los docentes propicie la generación de una tradición de enseñanza ajustada a las demandas curriculares y a la tendencia de formar ciudadanos reflexivos y democráticos. Algunos de los ejemplos de enseñanza descritos en estas páginas se vinculan a videograbaciones y videos clips de clases disponibles en Internet, www.criced.tsukuba.ac.jp/math/video/multiplicacion/, facilitando al docente la comprensión profunda de las ideas desarrolladas en este libro y animándolo a incorporar el Estudio de Clases en su desafío permanente de desarrollo profesional.

En paralelo al uso de este libro por los docentes en su desarrollo profesional se estará contribuyendo a brindar una mejor educación matemática a las nuevas generaciones y orientando el mejoramiento de la propuesta curricular para la enseñanza de la multiplicación. Los autores, Isoda y Olfos, agradecen las contribuciones de los nuevos autores que enriquecen esta publicación, e invitan a los lectores a involucrarse en el Estudio de Clases y al aprovechamiento de las ideas que aquí se han extendido con los aportes de eximios educadores matemáticos iberoamericanos, para que optimicen sus conocimientos en didáctica de la multiplicación apropiándose de un nuevo modelo de enseñanza que les llevará a un clima de clases más reconfortante y a mejores aprendizajes de sus alumnos.

Este libro hace suyo los temas más significativos del Estudio de Clases, tra-

tándolos en profundidad, dando énfasis a dos aspectos cruciales para el éxito de las clases de matemáticas: el reconocimiento de los conocimientos ya adquiridos por los alumnos antes de iniciar la clase y los atributos de la situación problema que lleva a un cambio en la comprensión del alumno como condición para alcanzar un aprendizaje más profundo. Estos dos elementos conforman la médula de la secuencia de contenidos de enseñanza tratados en este libro, elementos que a la larga constituyen la traza de las propuestas de enseñanza que guiarán al lector en sus esfuerzos por ajustar la enseñanza a los contextos y particularidades que viven sus alumnos.

Este trabajo conjunto se constituye en una poderosa herramienta que favorece en los profesores y formadores de profesores de educación básica de habla hispana la profundización en el conocimiento pedagógico del contenido y en el desarrollo de habilidades para gestionar la clase. Esto, a partir de la descripción y reflexión de “situaciones de clases” y simples cuestionamientos al alumno del tipo: “¿cómo lo calcularías?, ¿cambia la expresión si...?, ¿se puede hacer de otra forma?, ¿por qué esa forma permite llegar a la respuesta?”, que en definitiva conducen a aprendizajes de alto nivel y a su profunda comprensión.

Estructura del libro

Este nuevo libro está estructurado en 4 partes. Las tres primera recuperan los contenidos y actividades del libro de Isoda y Olfos (2009a).

La Parte I caracteriza las etapas de la enseñanza de la multiplicación de números naturales a partir de una revisión sinóptica del tratamiento de la multiplicación en el currículo de ocho países, cuatro del Medio Este asiático y cuatro de América; y luego, expone orientaciones para la enseñanza de la multiplicación extraídas desde la Guía de Enseñanza para Profesores de Matemática del Gobierno de Japón y se la compara con de las Orientaciones Curriculares que ofrece el Gobierno de Chile a sus homólogos.

La Parte II detalla la forma en que los programas de estudio, los textos y los docentes en Japón han conciliado, en el contexto público del Estudio de Clases, el tratamiento del concepto de multiplicación en segundo grado, los procedimientos para la enseñanza de las tablas y el descubrimiento de las propiedades en la multiplicación en la tabla del 1 al 9. El enfoque de enseñanza descrito en esta sección es un tema fascinante no sólo para los profesores de aula, sino también para sus formadores. Se aprecia cómo los

educadores matemáticos en Japón fueron capaces de articular el currículo en torno a la enseñanza de la multiplicación, a partir de la noción de extensión, haciendo prevalecer los aportes de la investigación internacional por sobre una tradición rígida de enseñanza que pudo desentenderse de los hallazgos de la investigación didáctica. Esta sección muestra la claridad con la que el plan de estudios japonés introduce la multiplicación al pensamiento infantil desde la suma iterada a la homotecia, promoviendo a temprana edad el desarrollo del pensamiento proporcional. Este enfoque cautela -como lo propusiera Descartes y lo avala la investigación en el área-, la vinculación de la multiplicación -emergente en 2º grado desde los principios de la adición identificados por Dedekind y Peano-, con la proporcionalidad, tema que emerge claramente en las representaciones gráficas en el 3º grado ante los problemas multiplicativos, y más adelante en el tratamiento de los múltiplos y la operatoria con fracciones; constituyendo un verdadero acierto en cuanto a la transposición didáctica. En esta Parte II, queda a la vista además la importancia que el currículo matemático japonés de segundo grado da a la acción de agrupar para construir la unidad en el tratamiento de las cantidades discretas, de modo que los niños sean capaces de extender sus ideas sobre la multiplicación en el continuo desde la suma iterada. Esta sección presenta planes de clases de los profesores Natsusaka y Tsubota de la Escuela Anexa de la Universidad de Tsukuba en Tokio, y la descripción de la clase pública y su discusión realizada con la presencia de cientos de profesores de aula japoneses y algunos latinoamericanos. La sección incluye aclaraciones sobre el uso de algunas expresiones y sugerencias sobre el tratamiento de los temas y el uso de materiales de enseñanza. También presenta planes de secuencias de clases completas que deleitarán la reflexión del docente en torno a la iniciación de la multiplicación, el tratamiento de las tablas y el estudio de las propiedades de la tabla hasta 9×9 .

La Parte III trata la enseñanza de los procedimientos estándares para la multiplicación con multidígitos¹, la multiplicación vertical y el algoritmo simplificado. Por un lado se analiza una clase en la que el profesor Muramoto, de la escuela elemental Maruyama, guía a sus alumnos sin apresurarse hacia la aparición del algoritmo de la multiplicación en tercer grado. Se analiza la cuarta clase de una secuencia de trece. La clase del profesor Muramoto fue realizada en público a un curso de 40 alumnos. Se incluye un análisis de la cla-

¹ Multiplicación con números de más de una cifra.

se que destaca los componentes y acontecimientos principales de la misma, constituyéndola en un ejemplar de las producciones del Estudio de Clases y de la tradición de la enseñanza de la matemática escolar en Japón. La clase fue codificada en inglés por el profesor David Tall, y luego elaboramos una versión en español, construyendo con ella una secuencia de videoclips con el objeto de caracterizar paso a paso los componentes del estilo de clase japonés. El vínculo www.criced.tsukuba.ac.jp/math/video/multiplicacion hace referencia al video y a los videoclips de la clase, que fueron elaborados ex profeso para la publicación de este libro. Se incluyen los videoclips de los siete acontecimientos principales de esa clase. Por otro lado, la sección, al igual que la anterior, desarrolla una secuencia de clases completa, tal como aparecería en una guía para el profesor, de modo que se dispone del ejemplo de una planificación completa en torno a la enseñanza de los procedimientos para multiplicar multidígitos, disponible para un tratamiento en un semestre o más.

Queda fuera de este libro el estudio de la enseñanza de estrategias de cálculo que muchas veces simplifican o bien sustituyen el uso del algoritmo o de la multiplicación vertical. El tema de las estrategias de cálculo es relevante en el proceso de enseñar a multiplicar números naturales, como por ejemplo dividir en 2 y multiplicar por 100 para multiplicar por 50, como también las estrategias para aproximar. Temas a los cuales también se le da importancia en Japón.

La Parte IV presenta los aportes de profesores iberoamericanos, favoreciendo la difusión de las ideas sobre el Estudio de Clases y el estilo de clases japonés, al compartir sus miradas y propuestas de enseñanza en torno a la multiplicación en los primeros años de escolaridad.

En primer lugar aparece el escrito de la doctora María del Carmen Chamorro de España, quien reflexiona en torno a la complejidad de la temática de la construcción curricular y la enseñanza de la multiplicación en el aula. Desde su profunda mirada académica sustentada en la didáctica francesa y en las ciencias cognitivas plantea como eje central la pregunta del por qué el fracaso en el aprendizaje de la multiplicación por parte de muchos niños de primaria. Explicita cuatro problemáticas en torno a la enseñanza y el fracaso de los alumnos para multiplicar: la poca comprensión de los alumnos, la poca destreza que desarrollan en torno al cálculo escrito, lo inapropiado de los métodos usuales de enseñanza y la permanencia del algoritmo tradicional

sin control... sin que el alumno pueda evaluar su progreso o se responsabilice de su producción. La doctora Chamorro ofrece explicaciones en torno al fracaso en el aprendizaje de la multiplicación y hace notar las virtudes de la enseñanza japonesa en cuanto a la primacía del sentido o de la dimensión semántica en los procesos de enseñanza aprendizaje y a la importancia que se otorga en Japón al uso de manipulativos. También hace notar la relevancia de la dimensión cultural, que se manifiesta por medio del espíritu competitivo, la valoración de la ciencia y el respeto a las personas, que son factores que favorecen el éxito de los enfoques de enseñanza y desarrollo profesional docente en Japón.

En segundo lugar se presenta el aporte del doctor David Block y de la licenciada Laura Reséndiz de México, quienes comparten una secuencia de enseñanza para el tratamiento de la multiplicación construida y validada en el marco de la Ingeniería Didáctica francesa. La propuesta de enseñanza constituye una secuencia de situaciones didácticas sobre un tipo de relación de proporcionalidad en la que a cada valor de un conjunto -número de collares- se le hacen corresponder, en el otro conjunto, parejas, tríadas, o “eneadas” de valores (números de perlas de distintos colores requeridas para ese número de collares). La secuencia incluye problemas relativamente simples de multiplicación y de división, y problemas más complejos de proporcionalidad del tipo “valor faltante”. Así mismo, se presentan los resultados de la aplicación de la secuencia en un grupo de 4º grado de primaria (alumnos de 9-10 años). Este trabajo tiene la virtud de acompañarse con explicaciones que facilitan la comprensión al lector ajeno a las ideas de la Ingeniería Didáctica. En el fondo Reséndiz y Block dan evidencias de la forma cómo el centro de investigación en educación probablemente de mayor prestigio en Latinoamérica, el CINVESTAV, encara el desafío de la construcción curricular desde una mirada más académica que la profesional predominante en el Estudio de Clases.

En tercer lugar se presenta el aporte de los doctores Ubiratan D’Ambrosio y Claudia Sabba de Brasil, quienes nos invitan a apreciar el desarrollo de sus ideas originarias, una mirada etnomatemática sobre la cuestión de la idea de multiplicar. La propuesta de enseñanza se nutre de los principios de aprendizaje por proyectos, mini-proyectos que se integran a las diversas áreas del conocimiento. La invitación de estos autores es a que nos interioricemos del estilo de trabajo en las escuelas Waldorf en Sao Paulo. Allí, el concepto de multiplicación se construye junto al de geometría de figuras planas por medio de la elaboración del pensamiento matemático en conjunto con las figuras

montadas en una tabla circular de madera. A pesar de que los contenidos matemáticos no están perfectamente integrados en los proyectos de esta escuela, en general, se puede apreciar que las preguntas versan sobre todas las áreas del conocimiento y en ese contexto se iría perfeccionando la propuesta. Destacan en la propuesta ideas de contexto ligadas al uso de celulares por parte de los alumnos para entrar en la proporcionalidad fotografiando sus figuras y rostros, apreciando la obra “El Hombre de Vitruvio” que nos legara Da Vinci. La presentación de la ‘foto’, por ejemplo, según los autores ofrece al alumno una localización -donde estoy y para donde voy- en el sentido de la construcción del conocimiento. La colaboración de los doctores Sabba y D’Ambrosio evidencia la autonomía y creatividad de las propuestas de enseñanza como trayectorias de aprendizaje exploradas en Brasil.

El cuarto aporte proviene de las profesoras Fátima Mendes, Jouana Brocardo y Hélia Oliveira de Portugal. Las autoras, teniendo en mente la noción pedagógica de “trayectoria”, muestran como una docente se hace cargo del aprendizaje de sus alumnos de 3° grado en torno a la multiplicación; docente, que al igual que el hombre de mar, acomoda las velas para enmendar los rumbos y así recalcar. En este caso, la propuesta de enseñanza opera bajo el supuesto de que los alumnos, atendiendo a sus ritmos y comprensiones, desarrollan diversas estrategias que los llevan a puerto. La literatura ubica las trayectorias en un nivel macro-didáctico, donde las tareas y secuencias de enseñanza se constituyen en insumos. Las trayectorias se asocian a potenciales niveles de logro, a objetivos de aprendizaje y competencias a alcanzar. Así, mientras el estudio de las tareas de aprendizaje se vincula a la micro-didáctica y el de las secuencias de enseñanza a la meso-didáctica, el estudio de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje se ubica en el contexto macro-didáctico, propio de un estudio longitudinal, que trata de la evolución de la comprensión de los estudiantes en torno a una noción a lo largo de los años. En la analogía del hombre de mar, la profesora diseña y acomoda la ruta para maximizar los beneficios de los vientos y así llegar a la meta. Estas ideas se asocian a los estándares y diseños basados en competencias propios de los diseños curriculares, los sistemas de enseñanza y sus subsistemas de evaluación en la actualidad.

Uso del libro

A investigadores y curriculistas recomendamos la lectura del libro desde el inicio. La Parte I está pensada justamente para diseñadores del currículo,

editores y para quienes están preparando un plan anual. A profesores en servicio y estudiantes de pregrado instamos a mirar primeramente los video-clips y videograbaciones de clases ejemplares en www.criced.tsukuba.ac.jp/math/video/multiplicacion. Si el lector se inicia en la práctica del Estudio de Clases con colegas de su escuela o cercanía, le recomendamos leer primero la clase del profesor Muramoto y darse tiempo para observar con detención y comentar los conceptos tratados en los videoclips desarrollados en el sitio arriba señalado. Sugerimos al lector que en lo posible integre un grupo de trabajo y mantenga sesiones semanales para compartir la lectura, la observación de videos y la reflexión en torno a su experiencia e intenciones de mejoramiento. Los autores instan al lector a que se aboque decididamente a la práctica del Estudio de Clases durante un par de semestres, fijando como contenido central “la enseñanza de los números y sus operaciones” con un foco en la multiplicación de números naturales (eventualmente fraccionarios o decimales).

La siguiente sugerencia para el grupo de lectores que se anime a emprender el Estudio de Clases con apoyo de este libro, es una invitación a revisar los planes de clases ejemplares conforme al nivel de escolaridad en el que se desempeña. Una lectura rápida de los planes de clases favorecerá la identificación de las principales fases constitutivas del estudio de la multiplicación, como también la articulación entre las clases y las situaciones de problemas propios de cada una de las clases. La lectura de los planes de clases junto a la práctica docente en torno a sus adaptaciones llevará al docente lector a desarrollar autonomía al preparar sus estrategias y materiales de enseñanza y poner en práctica los principios de una clase de resolución de problemas que favorece el aprendizaje de los contenidos curriculares. A medida que el grupo de lectores comprenda el estilo japonés de enseñanza centrado en “la resolución de problemas y los requerimientos de los programas de estudio” (Isoda, 2000) y sienta que se apropia de este estilo de enseñanza, podrá animarse tras un par de meses a que uno de sus integrantes experimente una clase pública planeada con dedicación y en forma colectiva, abierta a la observación de sus pares, para constituirla en una clase a investigar. Luego, el grupo de lectores puede reflexionar en torno a las secuencias de clases centradas en la discusión. Por último, sugerimos revisar la sección que analiza los programas de estudio, puesto que desafía a la reflexión crítica y al espíritu de investigación en la acción, para que fructifique un trabajo propio que beneficie a su escuela, entorno y en proyección a su país.

La lectura del libro junto a la revisión de los videoclips y videograbaciones de clases en el sitio www.criced.tsukuba.ac.jp/math/video/multiplicacion ofrecen variadas sugerencias a implementar en el aula; sin embargo, el aprovechamiento de ellas no está en implementarlas directamente, sino en reflexionar frente a ellas y responder a: ¿qué es apropiado para mis estudiantes?, ¿qué parece conveniente variar? Los profesores japoneses mejoran sus prácticas cuestionándose ¿qué mejora la práctica? y ¿cómo mejora?, comparan un currículo, discuten los objetivos y participan en el Estudio de Clases, formando un rol profesional en la tarea de enseñar.

El lector debe ser cuidadoso y distinguir el orden en que se lee el japonés y el orden en que se interpreta el multiplicando y el multiplicador en los textos japoneses. Conviene ser cuidadoso con respecto al uso del término “veces”. Los ejemplos de este libro aluden a situaciones como “grupos de 2 elementos repetidos tres veces” (3 veces 2), las que se registran “ 2×3 ”, con la unidad de medida o multiplicando a la izquierda. Para una comprensión profunda de estos detalles remítase al Anexo 2 de la Parte III del texto.

La lectura de la Parte IV es recomendada principalmente para quienes buscan adaptar las ideas japonesas a contextos propios, a autores de textos y a profesores innovadores en el marco de proyectos de innovación, ingenierías didácticas y/o trabajos de titulación en programas de postítulos de mención o especialización.

INTRODUCCIÓN

El Estudio de Clases y la enseñanza de la multiplicación

El Estudio de Clases, Jugyou Kenkyu, o bien “Lesson Study” según se lo conoce internacionalmente, ha contribuido a la investigación de la enseñanza de la matemática en Japón, impactando las decisiones curriculares nacionales con la mirada realista del profesor, frente a las necesidades y aspiraciones de un país moderno que educa a toda su nación. El Estudio de Clases se ha instalado armoniosamente en el sistema educativo japonés en el marco de la racionalidad y consistencia de un sistema que se perfecciona a sí mismo con ajustes curriculares periódicos, coordinados con la elaboración y distribución de textos escolares nacionales y la formación continua del profesorado.

El Estudio de Clases, como parte de las actividades para el desarrollo del sistema nacional de educación en Japón, contribuye al desarrollo profesional docente, a la implementación del currículo en las aulas y al mejoramiento permanente del currículo. No sería fidedigno afirmar que existe en Japón una única manera de enseñar matemáticas o que en todas las escuelas se enseña con igual profundidad. Pero, lo que sí se puede decir es que existe un cuidado único por hacer las cosas bien, y en ese espíritu, el currículo, los textos, los docentes y los investigadores, son fieles a los saberes de la cultura e innovan en la medida que tiene sentido hacerlo.

En los últimos 60 años la componente matemática del currículo escolar japonés se ha ajustado a las tendencias internacionales (National Council of Teachers of Mathematics, 1980; 1989) y a las exigencias que el mismo país se impone. Para cada década el Ministerio de Educación de Japón tiene programada una reforma curricular que conlleva a una transformación gradual en el sistema: licitación de textos, perfeccionamiento docente y evaluación referida al mejoramiento de los aprendizajes escolares. Tanto las autoridades gubernamentales a cargo del currículo escolar como las editoriales mantie-

nen contacto con los profesores, las escuelas experimentales y los Estudios de Clases, y así se mantiene una sinergia que favorece la efectividad en la innovación de la enseñanza de la matemática. Para una profundización de estas relaciones véase el libro *El Estudio de Clases Japonés en Matemáticas* (Isoda, Arcavi y Mena, 2007).

Teniendo en cuenta la complejidad del fenómeno educativo y la variedad de factores que afecta la organización de los sistemas educativos en el mundo, no es posible establecer simples relaciones de causa efecto entre el Estudio de Clases y la calidad de la enseñanza de un tópico particular. Ambas acciones, el Estudio de Clases y la concreción curricular en el aula, tienen su finalidad propia y se retroalimentan y fortalecen. En ese contexto, declaramos que el Estudio de Clases, como forma de trabajo cooperativo entre profesores, ha posibilitado en Japón fortalecer una educación matemática de calidad internacional, estableciendo vínculos clarísimos entre las delimitaciones curriculares, las tendencias internacionales, la calidad de los textos, y la efectividad de los docentes en la actividad cotidiana del aula.

De este modo, el Estudio de Clases ha dado cabida a un progreso armonioso entre desarrollo curricular y gestión en el aula, contribuyendo en la práctica a la aspiración de ofrecer una educación matemática centrada en la resolución de problemas que se articula con la exigencia del tratamiento de los contenidos establecidos en el currículo, el rol del contenido en la enseñanza y el desarrollo del interés de los alumnos por aprender matemáticas.

En este libro hemos recogido información de la tradición nipona sobre la enseñanza de la multiplicación, y terminamos esta introducción con una máxima con la que los educadores estadounidenses han cuestionado su propio actuar:

“Cuando un brillante maestro de América se retira, casi todos los planes de lecciones y prácticas que ha desarrollado también se jubilan. Cuando un profesor japonés se retira, deja un legado”.

PARTE I
La Multiplicación de los Naturales
en el Currículo

Tendencias internacionales sobre la Enseñanza de la Multiplicación

- *Tendencia a la Contextualización*

En las últimas décadas, varios países han redefinido las metas para las Escuelas Primarias en todas las áreas, dando prioridad a destrezas complejas como la resolución de problemas y la comunicación por sobre los conocimientos aislados.

Con respecto a las matemáticas se han identificado metas como “hacer conexiones entre la aritmética y la experiencia cotidiana, adquirir destrezas básicas, comprender el lenguaje matemático y aplicarlo en situaciones prácticas, reflexionar sobre las actividades matemáticas y chequear los resultados, establecer relaciones, reglas, patrones y estructuras, y describir y utilizar estrategias de investigación y de razonamiento” (Treffers et al., 2001).

En esta línea ligada a los contextos se ha desarrollado un vocabulario propio, con términos como los que a continuación se describen:

Contexto. El contexto es un evento, asunto o situación derivada de la realidad, el cual es significativo para los niños o el cual ellos pueden imaginar. Los niños usan métodos matemáticos a raíz de su propia experiencia. El contexto provee significado concreto y da la base para las relaciones matemáticas relevantes u operaciones que realiza el niño. Las situaciones podrían ser esquematizadas desde experiencias cotidianas tales como viajar en bus, comprar y manejar dinero. El contexto también puede ser encontrado en el mundo de las matemáticas en sí mismo, como en el caso de las propiedades de los números primos, dando origen a contextos aritméticos o matemáticos.

Contextualización. La contextualización significa dar significado a los números y operaciones relacionándolas a las situaciones significativas de cada día,

el mundo real o el mundo significativo de los niños. Por ejemplo, al resolver 63-47 un estudiante podría pensar en una diferencia entre edades de personas, porque dos personas tendrán la misma diferencia de edad en tres años, el problema podría ser reemplazado por 66-50, el cual es más fácil de resolver. En esta forma un problema formal es contextualizado en una situación de edades.

Destrezas básicas. En el dominio de las destrezas básicas se considera: el conteo hacia delante y atrás con distintas unidades, el conocimiento de las tablas hasta 10 en suma y multiplicación, la realización de tareas aritméticas simples usando eficientemente el conocimiento acerca de las operaciones, el hacer estimaciones en operaciones aritméticas para determinar un resultado aproximado, alcanzar comprensión de la estructura de los números naturales y entender las posiciones del sistema de numeración decimal, hacer uso inteligente de la calculadora, y modelar problemas simples en términos matemáticos.

Hacer aritmética concreta. Hacer operaciones aritméticas o razonamiento concreto significa hacer la operación mientras es fácil de imaginar. Esto a menudo da un incremento de la comprensión en tales operaciones y razonamientos de un contexto práctico o situación. Por ejemplo, cuando se tiene en mente un arreglo rectangular para mostrar que 12×25 es igual a 6×50 .

Memorización. La memorización es la asimilación del conocimiento: aprendizaje de los números y resultados aritméticos tales como los productos de las tablas de multiplicación por intuición y luego ser capaces de recordarlas cuando ellas se requieran. La memorización es a menudo el acto final en un proceso de aprendizaje en el cual las operaciones son graduales y en creciente eficiencia llevadas a niveles cada vez más altos. Por ejemplo, se dice que un estudiante ha memorizado 7×8 si conoce directamente que es 56, sin tener que trabajarlo conscientemente.

Modelo de contextos. Un modelo de contexto es una situación que puede mantenerse para un rango completo de situaciones aritméticas relacionadas. En ellas las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división están reflejadas significativamente. Tal contexto puede ofrecer soporte en llevar adelante un cálculo y desarrollar un procedimiento. La moneda es un ejemplo de uso de contexto para el cálculo en columnas. El cálculo formal adquiere significado para los niños si pueden descomponer una cantidad de monedas en monedas de \$ 100, \$10 y \$1.

- Presencia del principio de extensión en la enseñanza de la multiplicación

Otra idea nuclear presente en las propuestas curriculares actuales, que se nutre de los enfoques de aprendizaje modernos, corresponde a la noción de “extensión”, la cual tiene una posición central en la enseñanza de la multiplicación.

La enseñanza de la matemática escolar tiene como propósito, entre otros, que los estudiantes adquieran conceptos y que luego los re-conceptúen en ámbitos explicativos más generales. Por ejemplo, los alumnos adquieren la noción de número y aprenden las operaciones correspondientes en ámbitos cada vez más extensos: números naturales, decimales fraccionarios y enteros. Este proceso de extensión está ligado a la profundización de los objetos de aprendizaje y a la disponibilidad de formas de representación para los mismos.

Un primer paso en la enseñanza de la multiplicación con números naturales consiste en dar a entender a los alumnos el producto como la cantidad de elementos que resulta de grupos de igual número de elementos que se repiten. Esta idea se puede transferir fácilmente desde las cantidades a las medidas a partir de la noción de unidad de medida, lo que hace referencia a la proporcionalidad. Es clave la extensión del concepto “la unidad”, ello se logra a partir de la idea de grupo.

Un segundo momento en la enseñanza de la multiplicación corresponde al estudio de las tablas de multiplicar. En este momento también está presente el principio de extensión. Se trata de la proceduralización del concepto de multiplicación en el ámbito de los números de una cifra. Primero, las tablas del 2 al 5, luego del 6 al 9 y la multiplicación por 1. Más adelante corresponde la enseñanza de la multiplicación por 0, por 10 y potencias de 10. En esta segunda etapa, como lo propone la propuesta curricular japonesa, cabe dar importancia a las propiedades de la multiplicación, que primero se constata en los números pequeños y luego en los más grandes.

En un tercer momento, destinado al estudio de la multiplicación con multidígitos, se retoma la idea de extensión conceptual. En esta etapa los alumnos exploran estrategias y aprenden métodos para multiplicar números naturales que se expresan con más de una cifra; primero, decenas por unidades ($D \times U$), decenas por decenas ($D \times D$) y otras combinaciones, como $DU \times D$, incluyendo múltiples aproximaciones. En varios países esta extensión se lleva adelante

en 3° grado. Esto lleva a la conveniencia de disponer de nuevas formas para multiplicar, ya no cabe continuar con la memorización y se hace conveniente disponer de estrategias escritas, como por ejemplo, la forma vertical de la multiplicación y en definitiva un algoritmo. En cursos superiores, 4° grado en adelante, la extensión de la multiplicación se hace a los decimales, a las fracciones y a los negativos. En todos estos casos se extiende el uso del término “veces” al contexto de medidas de trazos proporcionales.

La extensión que implica operar con números decimales va más allá de la representación; incluye un cambio en el objeto sobre el cual se actúa, se opera sobre parte del todo, se redefine la unidad de medida o unidad de conteo, se trata de una extensión conceptual. La representación decimal de los números agrupando en unidades, decenas y centenas da origen al sistema de representación decimal de los números. Noción que es ampliada luego con los números decimales y finalmente a la noción de número real como elemento de un continuo que representa a una medida.

Orientaciones curriculares en torno a la enseñanza de la multiplicación en 8 países

Esta sección presenta un paralelo en torno a las propuestas de enseñanza de la multiplicación de los gobiernos de cuatro países de Asia y otros cuatro de Latinoamérica. Las comparaciones se atienen a Singapur (Sg), Hong Kong¹ (Hk), Corea (Ko), Japón (Jp), México (Mx), Colombia (Co), Perú (Pe) y Chile (Cl). El paralelo se restringe al ámbito de los números naturales. Se toma como base la información recabada por Isoda y Olfos (2009a) y se actualiza conforme a las innovaciones curriculares recientes en Japón, México y Perú. La comparación deja en evidencia lo detallado y claramente secuencial de los programas de estudio del Medio Este asiático en comparación a los de los países latinoamericanos.

Los ocho países considerados en esta revisión establecen entre sus metas que los alumnos adquieran un significado cada vez más extenso en relación a la multiplicación de números naturales y logren fluencia en los cálculos en un período de tres y cinco semestres. Las propuestas curriculares son bastante disímiles, mientras que en unos países se inicia la enseñanza de la multiplica-

¹ Hong Kong verdaderamente no constituye un país, en cuanto a los cánones usuales, sin embargo, funciona como economía independiente.

ción en el segundo semestre de primero básico, en otros se inicia a comienzos del tercero básico. En algunos países se integra el aprendizaje de la multiplicación con el de la división, mientras que en otros se intercalan unidades de enseñanza referidas a uno y luego al otro contenido, con ampliaciones sucesivas.

Las fuentes de información provienen de los Programas de Estudio vigentes a junio del 2008, a excepción de los datos considerados sobre México, Perú y Japón, que provienen de la información de las innovaciones curriculares recientes. Los datos de Colombia provienen de un currículo basado en competencias, estructurado en ciclos trianuales y no anual, lo que tiene un efecto significativo en el momento de hacer comparaciones.

El análisis comparativo se enfoca en cuatro aspectos de las propuestas curriculares para la enseñanza de la multiplicación con números naturales, estos son:

- La multiplicación en el marco de la extensión del ámbito numérico.
- La introducción al concepto de multiplicación.
- El descubrimiento y memorización de las tablas.
- El aprendizaje de la multiplicación multidígito.

Queda fuera de este análisis la relación entre la división y la multiplicación, el uso de calculadora, el estudio de los múltiplos y de las operaciones combinadas. Tampoco se lleva adelante un análisis de las estrategias de cálculo mental.

- Aspectos distintivos de las propuestas curriculares en torno a la multiplicación

En Corea (Korea Ministry of Education, 2006), la enseñanza de la multiplicación se inicia en segundo grado atendiendo a las siguientes metas:

- Comprender las situaciones para -y el significado de- la multiplicación.
- Comprender la tabla y multiplicar números de una cifra.
- Tratar el significado de la multiplicación como suma iterada o como el concepto de múltiplo, y relacionarlo con lo cotidiano.

En Singapur (Curriculum Planning and Development Division, 2006), la enseñanza de la multiplicación se inicia en primer grado:

- Es tratada como adición repetida en un ámbito de números hasta el 40.
- Se utiliza el símbolo de multiplicación (\times) en una sentencia matemática para representar una situación dada.
- Se excluye, en este nivel, el uso de las tablas de multiplicar.

En Hong Kong (Education Bureau Hong Kong, 2007), la extensión del ámbito numérico de 1° a 4° grado es exhaustiva:

- Primero se propone el tratamiento de los números hasta 10, luego hasta 20 y hasta 100. Así, conforme pasan los meses y años se tratan números de 3, 4 y luego 5 cifras.
- En segundo grado se desarrolla un concepto básico de multiplicación: multiplicar números de una cifra por números de dos o tres cifras en el multiplicando.

En Japón (Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology, 2009), la multiplicación se inicia en segundo grado, partiendo de las representaciones de los números.

- Primero se consideran grupos de igual tamaño, para concretizarlos en el modelo “número para la unidad” \times “veces que se repite la unidad” = “total”.
- En 2° grado se trabajan situaciones multiplicativas. Los alumnos exploran, construyen y aprenden las tablas, sus propiedades y exploran la multiplicación de números de 2 por 1 dígito.
- En 3° grado se enseña la multiplicación con multidígitos y la extensión de las propiedades de la tabla. El foco está en la exploración de formas para multiplicar, entender el algoritmo vertical y alcanzar precisión en la multiplicación.

En México (SEP, 2009), la enseñanza de la multiplicación se inicia en 2° grado con la resolución de problemas de multiplicación (relación proporcional entre medidas, arreglos rectangulares).

- En 2° grado se considera el cálculo mental del producto de algunos números de un dígito usando diversas estrategias.
- En 3° grado se refuerza y extiende la obtención rápida de productos con un dígito y las tablas, para resolver problemas. Se abarca la relación pro-

porcional entre medidas, los arreglos rectangulares y la expresión de razones sencillas entre cantidades.

- Se precisan caminos cortos para multiplicar dígitos por 10, por 100 y por sus múltiplos (20, 30, 200, 300, etcétera) y se establece y afirma un algoritmo para multiplicar números de hasta tres cifras por uno de un dígito.

En Perú (Ministerio de Educación, 2009), los programas de estudio presentan un currículo basado en competencias.

- Para 2° grado los Programas proponen que el alumno exprese un número de hasta dos cifras, como el doble, el triple, o la mitad de otro; Interprete el significado de la multiplicación a partir de sumas sucesivas y formule secuencias finitas de 2 en 2, de 5 en 5, de 10 en 10, con números de hasta dos cifras.
- En 3° grado se propone que el alumno explore patrones matemáticos en la multiplicación de números, use recursos de las TICs en ello, calcule mentalmente el producto de un número de dos dígitos por otro de un dígito, resuelva problemas con operaciones combinadas incluyendo la multiplicación de números de hasta dos dígitos por otro de un dígito y multiplique un número de dos dígitos por otro de un dígito.

En Colombia, el Ministerio de Educación Nacional (2003) estableció los estándares básicos de Competencias en Matemáticas. Estos dan una descripción genérica e integrada de las habilidades y saberes que debe adquirir un niño por etapas. Para un período de tres años (nivel inicial, correspondiente a 1° a 3° grado) se explicitan, entre otras, las siguientes competencias:

- Describo, comparo y cuantifico situaciones con números, en diferentes contextos y con diversas representaciones.
- Describo situaciones que requieren el uso de medidas relativas.
- Reconozco propiedades de los números (ser par, ser impar, etc.) y relaciones entre ellos (..., ser múltiplo de, ser divisible por, etc.) en diferentes contextos.
- Resuelvo y formulo problemas en situaciones de variación proporcional.
- Uso diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.

En Chile, los Programas de Estudio son muy detallados, incluyendo aprendizajes esperados y ejemplos de actividades de aprendizaje y de evaluación. En la descripción de los ejemplos de actividades para 3° grado (MINEDUC, 2003), se expresa:

- En situaciones de carácter multiplicativo planteadas por el profesor determinan, a través de sumas reiteradas, la cantidad total de elementos que conforman un todo si conocen la relación entre un elemento y el conjunto de elementos asociado a él (relación “uno a varios”). Para representar los objetos a los que se refiere el relato, pueden utilizar fichas u otros objetos manipulables.
- Se vende libros que contienen 10 figuras recortables cada uno. Si un niño compró 3 de esos libros, ¿cuántas figuras tendrá para recortar?
- Posteriormente el profesor resume lo realizado, rotula la operación como multiplicación y la expresa simbólicamente como (número de veces en que se repite el elemento unitario) (por) (el valor asociado al elemento unitario) (es igual) (al valor asociado a la nueva cantidad de elementos) lo que, en los casos descritos...

- Paralelo en torno al tratamiento de la multiplicación entre estos 8 países

Al comparar el contenido de las propuestas curriculares de los países latinoamericanos en comparación a los de Asia considerados aquí, se constata que en los primeros se da más importancia a las variaciones del contexto para la conceptualización, sin atender con profundidad otras variables de interés didáctico, como lo son la amplitud del ámbito numérico y la formación del sistema de representación

Las comparaciones se realizan por medio de tablas, para las cuales se utiliza la siguiente simbología:

- 1, 2, 3 y 4 indican los niveles de 1° grado a 4° grado respectivamente.
- 1' y 3' hacen referencia al segundo semestre de 1° y 3° grado.
- C hace referencia al Ciclo -1° a 3° grado-, sin explicitar el nivel.

- Referencias a la extensión del ámbito numérico

País o economía	Mx	Pe	Co	Cl	Ko	HK	Sp	Jp
< 40	-	-	-	-	-	-	1	-
< 100	1	1	-	1	1	1	1'	1
< 1000	2	2	C	2	2	1'	2	2
< 10000	3	-	-	3	3	2	3	3

Nótese que el Programa de Singapur es el único que establece que en el primer semestre de 1º grado se trate la multiplicación con números hasta 40.

- Comparación referida al significado dado a la multiplicación

País o economía	Mx	Pe	Co	Cl	Ko	HK	Sp	Jp
Suma repetida	-	-	C	3	1	-	1	-
Grupo como unidad	2	-	C	3	2	2	2	1
Proporcionalidad	-	1	-	3	2	2	2	2
Uso de dibujo	-	2	C	3	1	2	2	2
Arreglo	2	-	-	4	2	-	-	2

Nótese que Chile es el país que inicia más tardíamente el estudio de la multiplicación. Situación que estaría cambiando con la implementación que ha sido propuesta para el ajuste curricular (Proyecto de Ley).

- Comparación referida al uso de sentencias simbólicas y al uso de las palabras multiplicando y producto

País o economía	Mx	Pe	Co	Cl	Ko	HK	Sp	Jp
Frase matemática	-	-	-	3	1	2	1	2
Uso símbolo \times	2	-	-	3	2	2	1	2
Términos:								
Multiplicando	-	3	C	-	2	3	2	2
Producto	2	3	-	3	2	-	3	2

- Comparación referida al grado en que son tratadas las tablas de multiplicar

País o economía	Mx	Pe	Co	Cl	Ko	HK	Sp	Jp
Tablas 2 y 5	2	2	C	3	2	2	2	2
Tablas 3 y 4	2	2	C	3	2	2	2	2
Tablas 6 y 8	2	2	C	3'	2	2	3	2
Tablas 7 y 9	2	2	C	4	2	2	3	2
Multiplica por 10	3	2	C	3	3	3	2	2

- *Comparación referida a la multiplicación de números con más de una cifra*

País o economía	Mx	Pe	Co	Cl	Ko	HK	Sp	Jp
DU x U	2	2	C	4	3	3	3	3
CDU x U	2	3	-	4	3	3	-	3
MCDU x U	-	3	-	4	3	4	4	4
DU x DU	3	3	-	4	3	4	4	3
CDU x DU	3	3	C	4	3	4	4	3

- *Síntesis del paralelo en torno al tratamiento de la multiplicación:*

- Sólo en ocasiones las propuestas curriculares de los distintos países usan la palabra haciendo referencia a medidas de longitud o de otra magnitud; lo más usual es el empleo del término número para indicar una cantidad discreta o como símbolo para representar cantidades.
- Existen varias diferencias en las formas y momentos en que es tratada la multiplicación en los distintos países.
- Las propuestas de las economías asiáticas pautean con precisión las orientaciones para el tratamiento de la multiplicación, incluso explicitando restricciones.
- Los países latinoamericanos privilegian los significados, destacan la multiplicidad de los significados y a veces presentan ambigüedades.
- El formato del programa de México es el más parecido al formato de los programas de las economías de Asia. El Programa de Perú muestra menor desarrollo curricular que el de Chile y México. El Marco Curricular de Colombia, atendiendo a un modelo de competencias, parece insuficiente como para garantizar una enseñanza homogénea. El Programa de Chile se muestra recargado combinando distintos enfoques y una variedad de ejemplos, desperfilando las conexiones y la optimización de la labor docente.
- En los países latinoamericanos los profesores y autores de texto enfrentan un currículo recargado que les implica una ardua tarea y alta responsabilidad en la toma de decisiones curriculares.
- Los programas de los países asiáticos están más centrados en los objetos matemáticos que en sus representaciones. Los programas de Corea tienen un eje para modelos, de modo que la multiplicación es estudiada desde dos puntos de vista que se complementan. Singapur tiene el Programa más estructurado, con pequeños bloques de contenidos conectados entre

sí. Tanto los Programas de Hong Kong como los de Singapur enfatizan los aspectos estructurales del currículo, fijando incluso los conceptos que no deben ser tratados antes de tiempo.

En síntesis, se aprecia que las economías asiáticas consideradas en este estudio muestran mayor coherencia y conexión entre los contenidos de los Programas, y que el principio de extensión es clave para el diseño curricular en matemáticas.

El enfoque no directivo de las propuestas curriculares de los países latinoamericanos puede deberse a la falta de claridad de los diseñadores del currículo acerca de cómo optimizar las secuencias de tareas de aprendizaje en matemáticas, como también a la opción de dejar que las escuelas o los mismos docentes tomen decisiones atendiendo a la diversidad cultural propia de estos países, tanto en lo socioeconómico y cultural como étnico.

Enfoque curricular japonés para la enseñanza de la multiplicación

En la última década la comunidad internacional fijó su atención fuertemente en el Estudio de Clases; educadores matemáticos de distintos continentes mostraron interés en profundizar sobre el apoyo brindado por el gobierno japonés a sus profesores con materiales concretos, guías de enseñanza y textos escolares. Ello llevó paulatinamente a la traducción de varios documentos desde el japonés. Así, en el 2005 fue traducida por primera vez al inglés la Guía para la Enseñanza de la Matemática Escolar editada por el Ministerio de Educación, Cultura y Deportes de Japón, “Elementary School Teaching Guide for the Japanese Course of Study: Arithmetic (Grade 1-6)”. Luego, fueron traducidos al inglés los textos escolares de las editoriales Gakkoh Tosho (Nara, 2006) y Tokyo Shoseki (Hironaka y Sugiyama, 2006). Por otro lado, el apoyo brindado por Japón en educación a varios países centroamericanos llevó a la publicación en español de textos para alumnos y de guías para maestros elaboradas en colaboración por especialistas hondureños y japoneses, en el marco del proyecto PROMETAM (2005, 2007).

Por último, recientemente fue publicada una versión en inglés de la “Guía para la Enseñanza de la Matemáticas para profesores de primaria japoneses” (Isoda, 2010) conforme a los ajustes de los estándares curriculares, esto es, la Ley de Educación Escolar para Japón, revisada el 27 de junio del 2007.

Este rico material, en inglés y español, junto a algunos planes de clases, clases públicas y publicaciones de docentes investigadores japoneses y de otras latitudes que han participado en la última década en el marco de la cooperación internacional del foro APEC (<http://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec>) constituyen las principales fuentes utilizadas en esta sección para presentar el enfoque curricular japonés para la enseñanza de la multiplicación.

La enseñanza de la multiplicación en la Guía para la Enseñanza del Gobierno japonés

El currículo japonés establece que se introduzca la multiplicación en segundo grado, cuando el alumno ya estudió las decenas y centenas. De este modo las indicaciones desde la ley de Enseñanza (Mext, 2007) y más específicamente desde la “Guía para la Enseñanza del Programa de Estudio para las Matemáticas Escolar Elemental” (Mext, 2009) orientan al profesor a integrar la notación decimal con las operaciones de suma y de multiplicación, lo que se traduce en la comprensión o sentido de la multiplicación ligada al desarrollo de las destreza algorítmica asociada.

La Guía de Enseñanza hace referencia a los objetivos de aprendizaje y contenidos para cada grado, da indicaciones para la construcción de los planes de clases y provee sugerencias a los profesores con respecto al tratamiento de los contenidos

La Guía de Enseñanza presenta la siguiente secuencia para los primeros tres grados:

Grado	Números	Tratamiento de las operaciones
1º grado	De dos cifras	<ul style="list-style-type: none"> • Adición y sustracción de números de una cifra y casos simples de dos cifras
2º grado	De cuatro cifras	<ul style="list-style-type: none"> • Adición y sustracción • Concepto de multiplicación ligado a situaciones • Tabla de multiplicar y sus propiedades
3º grado	De seis cifras	<ul style="list-style-type: none"> • Multiplicación con multidígitos • División con una cifra en el divisor • Adición y sustracción simples con números decimales y fracciones

Como lo señala la versión en inglés de la Guía para la Enseñanza de la Escuela Elemental para los Programas de Estudio japoneses: Matemáticas, Grados 1 a 6 (Isoda, 2010), cuatro son los objetivos de la asignatura para segundo grado, los que se refieren a números, cantidades, figuras geométricas y sus

representaciones. El objetivo referido a los números dice: “A través de las actividades, usando objetos concretos, entre otros, ayudar a los niños a enriquecer el sentido del número. Ayudarlos a profundizar su comprensión del significado y de la representación de los números, como también su comprensión de la adición y la sustracción, y el uso de las operaciones. Específicamente, ayudarlos a entender el significado de la multiplicación, explorar formas de calcular y de usar los cálculos”.

Ofreciendo una explicación de los objetivos del nivel, la Guía establece para la dimensión “números y operaciones” de segundo grado: “...En cuanto a las operaciones, el foco principal está en la adición con dos dígitos y en la sustracción que es la inversa de estos cálculos, y sobre la multiplicación básica, la tabla de 1×1 a 9×9 ; por lo que estas destrezas deben ser sólidamente adquiridas. Bajo el enfoque espiral por grado, casos simples de adición y multiplicación de números de tres cifras y de multiplicación entre números de 2 dígitos y 1 dígito también deben ser enseñados”.

La Guía de Enseñanza ofrece indicaciones para el profesor. Con respecto a los contenidos de 2º grado hace notar: “La actividad de formar grupos de 2, 5 o 10 objetos, lleva al entendimiento de la idea de multiplicación. Cuando se cuenta una cantidad grande de objetos, la idea de agruparlos de a 10 y formar grupos de 10 en 10 y así sucesivamente lleva a la idea de la base 10 para el sistema de numeración” (Pág. 127).

La Guía para la Enseñanza ofrece cinco especificaciones para ayudar al alumno a entender el significado de la multiplicación y llevar adelante los cálculos, a saber:

- a) Identificar situaciones en las que se use la multiplicación.
- b) Explorar propiedades simples válidas para la multiplicación y usarlas para construir la tabla de multiplicar hasta 9 por 9 y para chequear los resultados de los cálculos.
- c) Aprender la tabla de multiplicar hasta 9 por 9 y multiplicar con precisión números de un dígito.
- d) Explorar formas para multiplicar un número de 2 dígitos por uno de 1 dígito, en casos simples.

Además, la Guía indica la forma del momento en que se debe introducir el símbolo “x” y ofrece ejemplos de actividades matemáticas para encontrar

propiedades y reglas de la multiplicación a partir de la construcción y observación de la tabla de multiplicar. Por ejemplo, sugiere que “los alumnos podrían darse cuenta que cuando el multiplicador aumenta en 1, en la tabla, el producto aumenta en tres, cuando está aprendiendo a multiplicar por tres. También, podría darse cuenta el alumno que en la tabla 3×4 y 4×3 dan el mismo resultado. Podrían surgir así, inductivamente, propiedades de la tabla” (Pág. 139).

La Guía incluye la identificación de casos donde tiene sentido usar la multiplicación. Por ejemplo, para encontrar la cantidad de objetos que hay en una cierta cantidad de unidades, donde es conocida la cantidad de objetos que constituye a la unidad, una simplificación de la suma iterada y una mirada de la multiplicación ligada a la proporcionalidad (Pág. 139).

Para tercer grado, la Guía para la Enseñanza también presenta los 4 objetivos planteados en la Ley de Educación Escolar de Japón. El objetivo referido a los números en 3° grado dice: “Ayudar a los niños a usar apropiadamente la adición y sustracción, ayudarlos a profundizar en su comprensión acerca de la multiplicación y hacer cálculos apropiados. Ayudarlos a entender el significado de la división, explorar formas de calcular y hacer los cálculos. Específicamente ayudarlos a comprender el significado y las representaciones de los números decimales y las fracciones.”

En cuanto a las explicaciones complementarias, para la dimensión “números y operaciones” en tercer grado, la Guía establece “...En cuanto a las operaciones con números naturales deben ser enseñados los siguientes procesos: adición y sustracción de números de 3 y 4 dígitos, multiplicación de números de 2 y 3 dígitos y división en que el divisor y el cociente sean de 1 dígito...”

La Guía para la Enseñanza en este nivel de 3° grado ofrece sugerencias para el tratamiento de la multiplicación con multidígitos, a saber:

En relación al objetivo de “Ayudar a los niños a profundizar en su comprensión de la multiplicación, multiplicar con precisión y extender su capacidad para realizar apropiadamente los cálculos”, la Guía para la Enseñanza sugiere (Pág. 165):

- a. Explorar formas de multiplicar números de dos o 3 dígitos y de 1 o 2 dígitos y entender que esos cálculos están basados en la multiplicación básica de números de 1 dígito. Entender la forma de calcular usando el algoritmo en columna.

- b. Multiplicar con precisión y usar los cálculos apropiadamente.
- c. Explorar propiedades de la multiplicación y usar las propiedades para explorar formas de calcular o chequear resultados.

La Guía para la Enseñanza presenta como ejemplo de Actividades matemáticas “Actividades para explorar y explicar el significado de las formas de calcular números naturales, decimales y fracciones usando objetos concretos, palabras, números, expresiones algebraicas, figuras y diagramas” (Pág. 165).

En relación a cómo calcular para multiplicar, la Guía para la Enseñanza propone: “Cuando se enseñe a multiplicar donde el multiplicador tenga una cifra, es importante enseñar a los estudiantes a pensar acerca de cómo calcular por sí mismos. Por ejemplo, cuando piensen acerca de cómo calcular 23×4 , podemos ver que 23×3 como $20 + 3$ y extender el cálculo en 20×4 y 3×4 . Esta idea se conecta con el algoritmo de la multiplicación. Es importante para los estudiantes el sistema de numeración de base 10 y la tabla de multiplicar que ellos ya han aprendido como la base para pensar en el algoritmo de la multiplicación. Lo mismo vale cuando se enseña a calcular la multiplicación de números de tres dígitos por un multiplicador de 1 dígito” (Pág. 167).

Otra sugerencia es “Cuando el multiplicador es un número de 2 cifras, es posible para los estudiantes pensar cómo calcular sobre la base de lo que ellos han aprendido acerca de cómo multiplicar múltiplos de 10 y la multiplicación con un multiplicador de un dígito. Por ejemplo, cuando multiplican 23×45 , el multiplicador 45 se puede ver como $40 + 5$ y extender el cálculo en 23×40 y 23×5 . Cuando los estudiantes piensen acerca de cómo multiplicar números de 2 cifras basados en la multiplicación de múltiplos de 10 y multiplicaciones de 1 dígito, es importante para los estudiantes tener una previsión del resultado y del proceso de cálculo (Pág. 167).

La Guía para la Enseñanza también da sugerencias en 3° grado para el uso de la multiplicación. Específicamente recomienda: “Hay casos simples de multiplicación donde el multiplicador o el multiplicando es el número de personas o de cierto objeto. La multiplicación puede ser usada también en casos como ‘el precio de una cinta es de 85 yenes el metro, ¿cuál es el costo de comprar 25 metros de cinta?’ y en casos como ‘una cadena se divide en 4 trozos de igual largo, cada trozo es de 9 cm., ¿de qué largo era la cadena al comienzo?’ La multiplicación puede usarse como el proceso inverso de la división. Es importante enseñar a los estudiantes cómo juzgar situaciones donde la multi-

plicación es usada y ser capaces de usarla de manera apropiada” (Pág. 167).

La Guía de Enseñanza también explica cómo enseñar a darle sentido a la multiplicación por cero: “Por ejemplo, cuando se juega a los dardos, si se obtiene cero aciertos en el área 3, ello puede ser representado por 0×3 ; si se obtiene 3 aciertos en el área que vale 0, entonces ello se puede representar por 3×0 . Los estudiantes pueden encontrar la respuesta a estos cálculos pensando en situaciones concretas o volviendo a pensar en $0+0+0$. La respuesta 3×0 puede encontrarse desde situaciones concretas o usando los principios de la multiplicación: devolviéndose 3×3 , 3×2 , 3×1 , cuánto será 3×0 ? El principio visible es que cuando el multiplicador decrece en uno el producto decrece en 3. Este tipo de multiplicación por 0 también puede ser usado en cálculos como 30×86 o 54×60 ” (Pág. 167).

La Guía para la Enseñanza también da sugerencias para el tratamiento del cálculo mental, para el estudio de las propiedades asociativa y conmutativa de la multiplicación, como también para la propiedad de la variación del producto en función de la variación del multiplicador o el multiplicando, llegando así a la propiedad distributiva. La propuesta de enseñanza busca vincular el dominio de las propiedades como una herramienta efectiva para mejorar la capacidad para calcular. Por último, la Guía para la Enseñanza presenta ejemplos de actividades matemáticas de exploración para explicar el significado y las formas de calcular la multiplicación de números naturales usando objetos concretos como monedas de 1 y 10 yenes (Pág. 169), para luego entrar en el tema de la división.

Es apreciable la consistencia de la propuesta de enseñanza ofrecida por la Guía para la Enseñanza y como se verá a continuación y en las Partes II y III de este libro, la consistencia entre esta propuesta de enseñanza y las actividades desarrolladas en los libros de textos japoneses.

- Secuenciación para la enseñanza de la multiplicación en los textos escolares

Los textos escolares, siguiendo las sugerencias de la Guía para la Enseñanza y las evidencias de la práctica del Estudio de Clases, dejan ver algunas regularidades en la secuenciación de la enseñanza de la multiplicación. Las regularidades llevan a la identificación de elementos comunes en las unidades, secuencias de enseñanza y lecciones presentadas en los textos.

Las secuencias de enseñanza observadas en distintos textos permiten identificar dos grandes fases para la enseñanza de la multiplicación de números naturales, a saber:

- 1ª Fase: La conceptualización de la multiplicación y el aprendizaje de las tablas con sus propiedades.
- 2ª Fase: Las estrategias para multiplicar números con más de una cifra y el algoritmo de la multiplicación.

Los textos de la editorial Gakkoh Tosho (2006) establecen la secuencia siguiente:

Fase 1: Segundo semestre de Segundo grado

(Ámbito de números hasta el 100). Situaciones asociadas a la multiplicación. En primer lugar la multiplicación $\times 2$, $\times 3$, $\times 4$ y $\times 5$. Luego, la multiplicación $\times 6$, $\times 7$, $\times 8$, $\times 9$ y $\times 1$.

Identificación de propiedades en la tabla (de los múltiplos de 5, casos de asociatividad).

La propuesta de enseñanza de Japón da importancia a la propiedad distributiva -esto es, $A(x+1) = Ax + A$, con $A=6, 7, 8, \text{ y } 9$, para x variando de 1 a 9- para el estudio de la tabla del 6 y siguientes. La constatación de la distributividad y la conmutatividad en la tabla la memorización de los productos, proveyendo además un método de verificación. Finalmente, se lleva al alumno a que compruebe la asociatividad en la tabla. En Japón, la Guía de Enseñanza para el Profesor hace hincapié en que los niños provean argumentos, algunos de ellos descriptivos y otros deductivos, ante los procesos de conceptualización y proceduralización de la tabla de multiplicar. El profesor también espera que durante el proceso de verbalización en público, los alumnos aprendan unos de otros y sean capaces de entender los puntos de vista de sus compañeros y de relacionarlos con las ideas propias. En Japón, la enseñanza de la multiplicación entre números de una cifra se lleva adelante en el segundo semestre de 2º grado. En tercer grado se continúa con la representación de la multiplicación por medio de medidas proporcionales en rectas paralelas

Fase 2: Primer semestre de Tercer grado

(Números hasta 1000, arreglos de 10 y de 10×10). Más propiedades: Conmutatividad. Aumento y decremento constante en tabla. Distributividad. Multiplicación $\times 0$, $\times 10$ y $\times 100$. Multiplicación de números de 1×2 cifras. Multiplicación

vertical de 2x1 cifras, de 3x1 cifras. Multiplicación mental de 2x1 cifras. Multiplicación escrita de 4x1 cifras.

Fase 3: Segundo semestre de Tercer grado

(Ámbito de números mayores que 1000). Multiplicación de 2x2 cifras. Situaciones que llevan a la forma vertical abreviada.

El texto del primer semestre de segundo grado de la editorial Gakkoh Tosho trata cómo medir longitudes en cm antes de la Fase 1 del estudio de la multiplicación, por lo que las situaciones que hacen referencia a cantidades en la fase 1 consideran cantidades discretas y medidas muy simples, como trozos de cinta de dos centímetros de longitud. En general, las situaciones que llevan a la conceptualización de la multiplicación hacen referencia a platos con frutas, bolsas con dulces, grupos de personas y representaciones como filas y columnas de bolas o círculos y torres o columnas de cubos. La representación por medio de torres de cubos facilita la visualización de las medidas de longitud, tema que se retoma tras la primera Fase del estudio de la multiplicación.

Los textos elaborados en español para Honduras en el proyecto PROMETAM, fueron ideados por profesores japoneses. Estos textos muestran una secuencia algo diferente a la de la editorial antes referida. Por ejemplo, al tratar la multiplicación por 7 en el texto del maestro se hace la siguiente observación “De ahora en adelante aparece en los problemas las cantidades continuas...” Otra diferencia con la secuencia referida es el momento en que se enseña a multiplicar por cero. La multiplicación por 0 es tratada junto a la multiplicación por 1, en cambio en la secuencia de la editorial Gakkoh Tosho la multiplicación por cero se realiza en la Fase 2, tras deducir las propiedades de la tabla de multiplicar.

Si bien existen entre los textos de distintas editoriales y año de edición variaciones en el orden de presentación de los temas y diferencias en las variables elegidas para avanzar en la conceptualización de la multiplicación, se observa que los textos de Japón evitan introducir conceptos usando nociones no trabajadas previamente por el alumno. Esto es, las secuencias de enseñanza son estrictas con respecto al análisis de tareas que implica su diseño.

La serie de textos del proyecto PROMETAM sigue el mismo principio. Presenta una Unidad en segundo grado con 5 lecciones sobre multiplicación, otra Unidad en tercer grado con 3 lecciones y otra en cuarto con 4 lecciones.

Multiplicación en Segundo grado:

Primera lección: Concepto, símbolo y operación de la multiplicación. Segunda lección: La construcción y memorización de las tablas del 2, 5, 3 y 4. Tercera lección: Construcción y memorización de las tablas del 6, 7, 8 y 9. Cuarta lección: La multiplicación con 1 y con 0. Quinta lección: La tabla de la multiplicación, la conmutatividad en la tabla y la regularidad del incremento en la tabla según el multiplicando.

Multiplicación en Tercer grado:

Primera lección: Multiplicación de múltiplos de 10 y 100 por unidades. Segunda lección: Multiplicación de números de dos cifras por números de una cifra. Tercera lección: Multiplicación de números de tres cifras por números de una cifra.

Multiplicación en Cuarto grado:

Primera lección: Multiplicación de números de 4 ó 5 cifras por números de una cifra. Segunda lección: Multiplicación de decenas por centenas. Tercera lección: Multiplicación de números de dos cifras entre sí. Cuarta lección: Multiplicación de números de tres cifras entre sí.

Los textos 2006 en inglés de la editorial Tokyo Shoseki también inician la multiplicación en segundo grado, sus unidades son:

Fase 1: Segundo semestre de segundo grado

(Ámbito de números hasta el 1000) Concepto de multiplicación. Multiplicación $\times 2$, $\times 5$, $\times 3$ y $\times 4$. Multiplicación $\times 6$, $\times 7$, $\times 8$, $\times 9$ y $\times 1$ y propiedades de la tabla.

Fase 2a: Primer semestre de Tercer grado

(Números hasta 1000) Multiplicación por 0. Propiedad Conmutativa y del aumento constante en la tabla. Multiplicación de unidades por decenas y centenas.

Fase 2b: Primer semestre de Tercer grado

(Incluye números mayores que 1000) Multiplicación con números de 2 cifras y de 1 cifra. Multiplicación con números de 3 cifras y 1 cifra.

Fase 3: Segundo semestre de Tercer grado

(Ámbito de números mayores que 1000) Multiplicación por decenas. Multiplicación de números de 2 cifras entre sí. Cálculo mental.

Fase 4: Primer semestre de Cuarto grado

(Ámbito de números mayores que 1000) Multiplicación con números de 3 cifras entre sí. Multiplicación de múltiplos de 10 y múltiplos de 100. Propiedad distributiva y el algoritmo de la multiplicación.

- Implicancias para la enseñanza de la multiplicación en países hispanoparlantes

De la revisión de textos y de la Guía para la Enseñanza del Gobierno japonés se desprende que los profesores en Japón enseñan la multiplicación de números naturales en segundo y tercer grado. En segundo grado enseñan el significado de la multiplicación, las tablas de multiplicar y sus propiedades. Las orientaciones aportadas por la Guía para la Enseñanza a los autores de textos y profesores de aula establecen que más allá de la memorización los alumnos construyan por sí mismo las tablas en función de su significado y el conocimiento previo de la adición. Para tercer grado, la Guía de Enseñanza establece que se estudie la multiplicación de números de hasta tres cifras por números de dos cifras. De este modo, y en conformidad a los textos escolares revisados, la multiplicación es enseñada en un lapso de 3 semestres a partir del segundo semestre de segundo grado.

Cabe plantear la pregunta ¿en qué difieren las recomendaciones oficiales para la enseñanza de la multiplicación ofrecidas en Japón de las ofrecidas en países latinoamericanos? Existen varias diferencias, por ejemplo las indicaciones curriculares en Chile establecen:

- enseñar la multiplicación y la división de manera conjunta;
- estudiar la tabla del 10, y no la del 3 y del 4, tras estudiar las tablas del 2 y del 5;
- iniciar el estudio de la multiplicación como un modelo que hace referencia a proporcionalidad;
- estudiar la multiplicación atendiendo a la vez a las magnitudes y a las cantidades discretas... ”

¿Son estas indicaciones las claves que llevan a la diferencia de logros de aprendizaje por parte de los niños de estas dos localidades? O bien, ¿esas son sólo diferencias de forma que no afectan los niveles de logros?

En Chile por ejemplo, los Programas de Estudio establecen que se inicie la

multiplicación de números naturales en tercero básico y se termina en quinto básico, en un lapso de 5 semestres. Se aprecia que en Japón la enseñanza de la multiplicación se realiza en menos tiempo y se comienza con niños de menor edad. Además, se logran aprendizajes más eficientes, según lo corroboran estudios internacionales

Es posible que la clave no esté en qué se haga primero o qué se enfatice más, sino más bien en la coherencia interna del sistema de sugerencias que se le provean al profesor. Eventualmente, más allá de las sugerencias ofrecidas, importaría entender cómo se relacionan las sugerencias entre sí, se potencian y no llevan a conflictos.

Por ejemplo, para que los niños comprendan la multiplicación los profesores japoneses recurren a situaciones en que los niños piensan en cantidades discretas y luego en cantidades continuas (representadas por medidas). El tema de las magnitudes es clave en el currículo japonés, constituyéndose en uno de los ejes o dimensiones del currículo. En Chile, ese tema es tratado en el subsector de “medio social y natural”. Al revisar los Programas de Matemáticas de primer y segundo básico chilenos, por ejemplo, se aprecia el uso no técnico de las palabras “cantidad”, “medida”, “magnitud”. Esto es, se usan como parte del vocabulario del profesor adulto y no se consideran como objetos de enseñanza. Se hace referencias a ejemplos con metros, centímetros y litros, y no se considera el significado que esas palabras pueden tener para el alumno. ¿Serán esos detalles importantes en el momento de buscar explicaciones al por qué los niños aprenden más rápido, a menor edad y con mayor efectividad la multiplicación en Japón? A nuestro entender, esos detalles son claves.

Surgen a la mente varias razones que explican este fenómeno, entre ellas se destaca la idiosincrasia del pueblo japonés que vela por una educación de calidad para sus hijos, y en ello estriba una organización curricular minuciosa, estrategias de enseñanza coherentes, apoyo de los padres y un soporte institucional gubernamental que garantiza condiciones de vida básica para toda su población escolar. No se trata sólo de recursos económicos, pues países con niveles económicos similares no siempre tienen los mismos logros. El Estudio de Clases ha favorecido la concreción de un currículo nacional articulado y de estrategias de enseñanza eficientes, las cuales se ponen de manifiesto en los textos de enseñanza y planes de clases, como podrá apreciarse en las Partes II y III de este libro.

